Hermann Kremer (de.sci.mathematik / 29-08-2002)

Hallo,

==
Gauß'sche Additionslogarithmen feiern dieses Jahr ihren 200. Geburtstag
==

Da die Gauß'schen Logarithmen oder Additionslogarithmen heuer ihren
200-sten Geburtstag feiern können, möchte ich ihnen im folgenden eine
kleine Hommage widmen.
Hoffentlich ist sie zumindest ein wenig interessant für (in dieser
Reihenfolge):

Fans von Logarithmen (und insbesondere deren Tafeln [1]),
Fans der Mathematikgeschichte,
Fans von Carl Friedrich Gauß,
Informatiker (für die kommt ganz am Ende auch was ...)
Sonstige Leser von d.s.m.

[1] Eine sehr ausführliche Geschichte der Logarithmentafeln findet man
z.B. in der Encyclopedia Britannica unter dem Stichwort
"Table, Mathematical". Die Ausgabe von 1911 steht komplett im Netz:
http://1911encyclopedia.org/T/TA/index.htm ,aber leider ziemlich mies
gescannt - um den Schluß des Artikels zu lesen, muß man
auch den Folgeartikel "Table-Turning" (Tischrücken :-)
aufrufen ...

Die Geschichte der Gauß'schen Logarithmen oder Additionslogarithmen begann
im Jahre XI des französischen Revolutionskalenders, d.h. 1802/03, mit einem
von Zecchini Leonelli in Bordeaux veröffentlichten und aus zwei einzelnen
Abhandlungen und einem Anhang bestehenden kleinen Buch

Z. Leonelli: Supplément logarithmique. Théorie des logarithmes
additionels et déductifs.
Bordeaux: Brossier, an XI.

Eine deutsche übersetzung davon erschien 1806:

LEONELLIs logarithmische Supplemente, als ein Beitrag, Mängel
der gewöhnlichen Logarithmentafeln zu ersetzen.
Aus dem Französischen nebst einigen Zusätzen von GOTTFRIED
WILHELM LEONHARDI, Souslieutenant beim kurfürstl. sächsischen
Feldartilleriecorps.
Walther'sche Hofbuchhandlung Dresden, 1806. 88 S. in Octav

Diese übersetzung wurde zwei Jahre später von Carl Friedrich Gauß sehr
ausführlich in:

LEONELLI, Logarithmische Supplemente.
Allgemeine Literaturzeitung vom Jahre 1808, Nr. 45, Februar 12.,
S. 353-356. Halle-Leipzig 1808.

rezensiert; die vollständige Rezension kann man in
http://134.76.163.65/agora_docs/136917TABLE_OF_CONTENTS.html --> 121
nachlesen.

Der zweiten Abhandlung des Leonelli'schen Buchs zollt Gauß gebremstes Lob:

... Die andere [zweite Abhandlung] entwickelt die Idee einer
besonderen Tafel, vermittelst welcher die Logarithmen von
Summen oder Differenzen zweier bloss durch ihre Logarithmen
gegebenen Grössen durch eine einzige Operation mit einer

> Bequemlichkeit sollen bestimmt werden können, wie sie bei anderen Verfahrensarten nicht Statt findet; und zwar, des Vfs. Plane nach, gleichfalls mit einer ungewöhnlich grossen Anzahl von Decimalen (14); von dieser Tafel ist jedoch nur erst eine Probe beigefügt. Da das Numerische der Logarithmen und jede sich darauf beziehende Erleichterung jedem, der viel mit Zahlenrechnungen zu thun hat, von grosser Wichtigkeit ist: so wird es sich wohl der Mühe verlohnen, diesen Untersuchungen eine nicht bloss oberflächliche Aufmerksamkeit zu widmen, um besonders den praktischen Werth der davon zu hoffenden Vortheile würdigen zu können. ...
> ... Bei analytischen Rechnungen ... sind LEONELLIs Tafeln unstreitig das Brauchbarste und Bequemste, was man zu diesem Behufe anwenden kann. ...

Weiterhin schrieb Gauß, eingehend auf eine Stellungnahme des Astronomen Jean Baptiste Delambre und Leonelli's Erwiderung darauf, die beide in dem Büchlein ebenfalls abgedruckt sind:

> ... Das Verdienst der eigenen Erfindung und eigenen Berechnung bleibt also LEONELLI immer ungeschmälert, und es ist billig, dass wir ihm besonders für letztere den gebührenden Dank zollen. ...
> ... LEONELLI hat sehr recht, sich zu beschweren, dass man ein solches [von Delambre vorgeschlagenes] Verfahren dem seinigen an die Seite setzen wollte.

Betrachten wir jetzt die von Leonelli vorgeschlagene Tafel. Sie besitzt drei
Spalten, und

> ... um uns kürzer zu fassen, wollen wir, anstatt LEONELLIs schwerfällige und unnöthige Terminologie zu gebrauchen, die zusammengehörigen Glieder dieser drei Columnen durch P, Q, R bezeichnen. ...

Für eine Folge reeller postiver Zahlen m enthält die erste Spalte die Werte log(m), die zweite Spalte die Werte log(1 + 1/m) und die dritte Spalte die Werte log(1 + m), d.h. man konstruiert eine Tabelle der Form

m	P = log(m)	Q = log(1 + 1/m)	R = log(1 + m)

Um nun den Logarithmus der Summe zweier Zahlen zu berechnen:

```
  log(c) = log(a + b) ,
```

setzt man m := a/b, d.h. log(m) = log(a) - log(b), und geht damit in die
Spalte P. Es gilt dann:

```
Algorithmus LADD:
----------------
  P := log(m)     = log(a) - log(b) = log(a/b)
  Q := log(1+1/m) = log(1 + b/a) = log((a + b)/a) = log(a + b) - log(a)
  R := log(1+m)   = log(1 + a/b) = log((b + a)/b) = log(a + b) - log(b)
  -------
  log(c) = log(a + b) = log(a) + Q = log(b) + R .
  -------
```

Man sieht, daß der Wert von m = a/b selbst überhaupt nicht gebraucht wird,
sondern daß man nur die Logarithmen von a und b benötigt.

Um jetzt den Logarithmus der Differenz zweier Zahlen zu berechnen:

```
  log(c) = log(a - b) ,
```

setzt man
e n t w e d e r: 1 + 1/m := a/b, d.h. log(1 + 1/m) = log(a) - log(b),
und geht damit in die Spalte Q. Es gilt dann:

```
Algorithmus LSUB-Q:
------------------
  Q := log(1+1/m) = log(a) - log(b)  = log(a/b)
  P := log(m)     = log(1/(a/b - 1)) = log(b/(a - b) = log(b) - log(a - b)
  R := log(1+m)   = log(1/(1 - b/a)) = log(a/(a - b) = log(a) - log(a - b)
  -------
  log(c) = log(a - b) = log(b) - P = log(a) - R
  -------
```

o d e r: 1 + m := a/b, d.h. log(1 + m) = log(a) - log(b), und geht damit
in die Spalte R. Es gilt dann:

```
Algorithmus LSUB-R:
------------------
  R := log(1+m)   = log(a) - log(b)  = log(a/b)
  P := log(m)     = log(a/b - 1)     = log((a - b)/b) = log(a - b) - log(b)
  Q := log(1+1/m) = log(1/(1 - b/a)) = log(a/(a - b)  = log(a) - log(a - b)
  -------
  log(c) = log(a - b) = log(b) + P = log(a) - Q
  -------
```

Hat man einmal eine solche Tabelle berechnet, so kann man in der Tat damit
auch die Logarithmen der Summen oder Differenzen von Zahlen berechnen, von
denen jeweils nur die Logarithmen bekannt sind. Zum nahtlosen Anschluß
solcher Tafeln an die damals gebräuchlichen Logarithmentafeln von Vlacq,
Vega, Lalande u.a. gehen Leonelli, Gauß und auch alle späteren Autoren
stillscheigend von log() als dem Briggs'schen (dekadischen) Logarithmus aus.
Weiterhin wird stillschweigend vorausgesetzt, daß man numerisch die folgenden
Fälle unterscheidet

```
  a*b  ->  +(|a|*|b|),  -(|a|*|b|)
  a/b  ->  +(|a|/|b|),  -(|a|/|b|)
  a+b  ->  +(|a|+|b|),  -(|a|+|b|),  +(|a|-|b|),  -(|a|-|b|)
  a-b  ->  +(|a|-|b|),  -(|a|-|b|),  +(|a|+|b|),  -(|a|+|b|)
```

und bei einer längeren logarithmischen Rechnung die jeweiligen Vorzeichen der
einzelnen Teilresultate in geeigneter Weise mitführt. Den Rechnern der
damaligen Zeit war dies aber so selbstverständlich, daß sie darüber keine
Worte verloren.

Die erste Abhandlung des Büchleins von Z. Leonelli jedoch, welche die Verfahren
zur Berechnung einer solchen Tafel für beliebig viele Dezimalstellen enthält
und und einen Tafelausschnitt mit 14 Stellen bringt, wird von Gauß ziemlich

verrissen:

> ... Obgleich wir LEONELLIs Gedanken, durch eine solche Tafel die logarithmischen Rechnungen zu erleichtern, im Ganzen genommen unsern Beifall nicht versagen können, sondern vielmehr die wirkliche Ausführung einer solchen Tafel für wünschenswerth halten: so können wir doch allem übrigen, was LEONELLI über diesen Gegenstand sagt, nur wenig Werth beilegen. Seine Entwicklung des Gebrauchs ist für einen so elementarischen Gegenstand mit unnöthiger Weitläufigkeit vorgetragen. Auch nur etwas tiefere Untersuchungen ... findet man garnicht, wohl aber einige bloss hingeworfene, und zum Theil ziemlich verworren ausgedrückte äusserungen, aus denen sich schliessen lässt, dass LEONELLI dergleichen gar nicht, oder doch ganz unrichtig angestellt hat. ...
> ... Noch eine Probe, wie oberflächlich LEONELLI seinen Gegenstand behandelt hat, gibt die S. 60 vorgetragene Formel ...

Vier Jahre später, im November 1812, veröffentlichte dann Gauß selbst in der Zach'schen Monatlichen Correspondenz, einem astronomischen Mitteilungsblatt, den Aufsatz

> Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Von Herrn Prof. GAUSS.
> Monatliche Correspondenz, herausg. vom Freih. v. Zach, No. 26, Nov. 1812, S. 498

Die Einleitung und Gebrauchsanweisung für diese Tafel kann man in http://134.76.163.65/agora_docs/137412TABLE_OF_CONTENTS.html --> 244 nachlesen, aber leider nicht die komplette Tafel.
Man beachte dabei, daß Gauß die drei Spalten jetzt nicht mehr durch P, Q, R bezeichnet wie in seiner Rezension des Leonelli'schen Buchs, sondern durch A, B, C; ich werde aber bei der ursprünglichen Bezeichnung P, Q, R bleiben.

Die Tafel ist genau so aufgebaut wie oben beschrieben und enthält die vollständigen 5-stelligen Additionslogarithmen, wobei die erste Spalte (P-Spalte) eine Auflösung von

```
0.0  <  p  <=  2.0  in Schritten von  0.001
2.0  <  p  <=  3.4  in Schritten von  0.01
3.4  <  p  <=  5.0  in Schritten von  0.1
```

besitzt. Gauß gibt dafür als Gebrauchsanweisung an, man solle die Rechnung so führen, daß unter der stillschweigenden Voraussetzung a, b > 0 in log(a + b) oder log(a - b) die Zahl a immer die größere sei, d.h. a/b >= 1 gelte. Für die Summe gilt dann gemäß Algorithmus LADD:

```
log(a) - log(b) => P
------------------------
log(a + b) = log(a) + Q     oder
log(a + b) = log(b) + R .
```

Für die Differenz solle man für log(a) - log(b) > log(2) = 0.30103 den Algorithmus LSUB-R verwenden:

```
log(a) - log(b) => R
------------------------
log(a - b) = log(a) - Q     oder
log(a - b) = log(b) + P
```

und für log(a) - log(b) < log(2) = 0.30103 den Algorithmus LSUB-Q:

```
log(a) - log(b) => Q
------------------------
log(a - b) = log(a) - R     oder
log(a - b) = log(b) - P
```

Gauß bemerkte noch dazu:

> ... Es gibt daher bei jeder Aufgabe zwei Auflösungsarten; man thut aber wohl, sich an eine bestimmte zu gewöhnen ... Mir ist dies bei der jedesmal zuerst angesetzten Manier am bequemsten gefallen.

Letzteres ist einsichtig, denn dann steht der gesuchte Wert immer in einer Nachbarspalte der Eingangsspalte.

Weiterhin schrieb Gauß:

> ... Die Idee dazu hat LEONELLI, so viel ich weiss, zuerst angegeben; allein seine Meinung war, eine solche Tafel für Rechnungen mit 14 Decimalen zu construiren, und gerade dies kann ich nicht zweckmässig finden. ... würde fast nie von Nutzen, und immer nur von wenig Nutzen sein, da so scharfe Rechnungen so selten - in der eigentlichen practischen Astronomie nie - vorkommen ... Ich habe diese Tafel zu meinem eigenen Gebrauch für Rechnungen mit 5 Decimalen, die in der Ausübung die häufigsten sind, schon vor vielen Jahren construirt, und die, wenn auch jedesmal kleine, doch wenn sie so viele Tausendmale wiederkehrt, sehr erhebliche Erleichterung, hat mir die darauf gewandte Mühe bereits reichlich ersetzt.
> Es wäre zu wünschen, dass jemand sich der Arbeit unterzöge, eine ähnliche Tafel in 10 oder 100 mal so grosser Ausdehnung für Rechnungen mit 7 Decimalen zu construiren, die als ein sehr schätzbares Supplement den gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln beigefügt werden könnte. ...

Die Gauß'sche Tafel mag etwa folgendermaßen ausgesehen haben, wobei

A = log(m) = P, B = log(1 + 1/m) = Q, C = log(1 + m) = R

bedeutet und die m-Spalte dort fehlt.

m	A	B	C
1.000	0.00000	0.30103	0.30103
1.002	0.00100	0.30053	0.30153
1.005	0.00200	0.30003	0.30203
1.007	0.00300	0.29953	0.30253
1.009	0.00400	0.29903	0.30304
1.012	0.00500	0.29854	0.30354
1.014	0.00600	0.29804	0.30404
1.016	0.00700	0.29754	0.30455
1.019	0.00800	0.29705	0.30505
1.021	0.00900	0.29655	0.30555
	....		
	....		
	....		
97.949	1.99100	0.00441	1.99541
98.175	1.99200	0.00440	1.99640
98.401	1.99300	0.00439	1.99739
98.628	1.99400	0.00438	1.99838
98.855	1.99500	0.00437	1.99937
99.083	1.99600	0.00436	2.00036

99.312	1.99700	0.00435	2.00135
99.541	1.99800	0.00434	2.00234
99.770	1.99900	0.00433	2.00333
100.000	2.00000	0.00432	2.00432
102.329	2.01000	0.00422	2.01422
104.713	2.02000	0.00413	2.02413
107.152	2.03000	0.00403	2.03403
109.648	2.04000	0.00394	2.04394
112.202	2.05000	0.00385	2.05385
114.815	2.06000	0.00377	2.06377
117.490	2.07000	0.00368	2.07368
120.226	2.08000	0.00360	2.08360
123.027	2.09000	0.00352	2.09352
125.893	2.10000	0.00344	2.10344
	....		
	....		
	....		
2041.738	3.31000	0.00021	3.31021
2089.296	3.32000	0.00021	3.32021
2137.962	3.33000	0.00020	3.33020
2187.762	3.34000	0.00020	3.34020
2238.721	3.35000	0.00019	3.35019
2290.868	3.36000	0.00019	3.36019
2344.229	3.37000	0.00019	3.37019
2398.833	3.38000	0.00018	3.38018
2454.709	3.39000	0.00018	3.39018
2511.886	3.40000	0.00017	3.40017
3162.278	3.50000	0.00014	3.50014
3981.072	3.60000	0.00011	3.60011
5011.872	3.70000	0.00009	3.70009
6309.573	3.80000	0.00007	3.80007
7943.282	3.90000	0.00005	3.90005
10000.000	4.00000	0.00004	4.00004
12589.254	4.10000	0.00003	4.10003
15848.932	4.20000	0.00003	4.20003
19952.623	4.30000	0.00002	4.30002
25118.864	4.40000	0.00002	4.40002
31622.777	4.50000	0.00001	4.50001
39810.717	4.60000	0.00001	4.60001
50118.723	4.70000	0.00001	4.70001
63095.734	4.80000	0.00001	4.80001
79432.823	4.90000	0.00001	4.90001
100000.000	5.00000	0.00000	5.00000

Die Gauß'sche Tafel wurde 1817 von Johann Pasquich, dem Direktor der Sternwarte in Ofen [heute ein Stadtteil von Budapest], in eine reguläre Logarithmentafel ungeändert übernommen:

> Abgekürzte Logarithmisch-Trigonometrische Tafeln, mit neuen Zusätzen zur Abkürzung und Erleichterung trigonometrischer Rechnungen, heraugegeben von JOH. PASQUICH, Director der Königl. Ofner Sternwarte.
> Leipzig: In der Weidmannschen Buchhandlung 1817.
> XXXII und 228 Seiten in Octav. (Auch mit Lateinischem Titel.)

Ein Jahr später ging Gauß' Wunsch nach einer 7-stelligen Tafel für die Additionslogarithmen dann in Erfüllung:

E. A. MATTHIESSEN: Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind.
Altona: Bei J. F. Hammrich 1818.
Einleitung 33 S. Die Tafeln 212 S. in Quart. (Titel und Einleitung auch in Lateinischer Sprache.)

Beide Tafeln wurden von Gauß in der Zeitschrift

Göttingische gelehrte Anzeigen, 4. October 1817

bzw.

Göttingische gelehrte Anzeigen, 30. Januar 1819

sehr ausführlich und lobend besprochen; die Rezensionen kann man online in
http://134.76.163.65/agora_docs/137412TABLE_OF_CONTENTS.html --> 246, 250
nachlesen.

Offensichtlich reichten die 5- bzw. 7-stelligen Tafeln der Additionslogarithmen
für die damaligen Bedürfnisse aus, denn eine 9-stellige Tafel wurde erst 1891
von Gundelfinger und Nell publiziert, siehe weiter unten unter JFM 23.1255.02 .

Im Jahre 1840 schrieb dann Gauß in der von Vega und Hülse herausgegebenen
"Sammlung mathematischer Tafeln" unter dem Titel

Auflösung quadratischer Gleichungen in der Form, dass nicht die Coeffizienten der Gleichung selbst, sondern deren Logarithmen gegeben sind, und dass man auch nicht ihre Wurzeln selbst (oder eine derselben), sondern vielmehr deren Logarithmen zu anderweitiger Benutzung nöthig hat

einen kleinen Aufsatz über die Verwendung von Additionslogarithmen bei der
Lösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln, wobei er sich auf eine
ungenannte 5-stellige Tafel mit noch drei zusätzlichen Spalten bezieht;
vermutlich war dies eine um diese Spalten ergänzte Version seiner eigenen
5-stelligen Tafel.
http://134.76.163.65/agora_docs/137412TABLE_OF_CONTENTS.html --> 255
Allerdings gibt er dort nur die fertigen Formeln und ein einfaches Beispiel an
und überläßt die Herleitung dem geneigten Leser als kleine Aufgabe.
Siehe auch weiter unten unter JFM 21.0094.03 .

Ob Gauß selbst noch mehr zu diesem Thema veröffentlicht hat, konnte ich bisher
leider noch nicht feststellen; im Inhaltsverzeichnis seiner 12-bändigen
Gesammelten Werke habe ich jedenfalls nichts sonst darüber finden können -
und die Unzahl von Briefen habe ich nicht alle gelesen ;-))

Es ist aber bemerkenswert, mit welcher Akribie Gauß die im Handel erhältlichen
trigonometrischen und Logarithmentafeln untersucht und rezensiert hat; in
http://134.76.163.65/agora_docs/137412TABLE_OF_CONTENTS.html
findet sich eine ganze Reihe solcher Rezensionen, die nicht nur auf den Inhalt,
sondern auch auf Format, Qualität und Farbe des Papiers, Layout, Schriftfonts,
Anordnung von Trennstrichen u.v.m. sehr ausführlich eingehen und die teilweise

in der "Allgemeinen Literaturzeitung" erschienen sind; offenbar wurden damals
auch Logarithmentafeln zur Literatur gezählt.

Die nächste Veröffentlichung zu den Additionslogarithmen, die ich orten konnte,
war eine Neuauflage des Büchleins von Z. Leonelli aus dem Jahre 1875, ebenfalls
in Bordeaux, mit einem Vorwort des Mathematikers Jules Hoüel.

Dann erschienen die folgenden Aufsätze, die hier mit ihren vom

  Electronic Research Archive for Mathematics / Jahrbuch Database
  Jahrbuch Project: Copyright (c) 2002 European Mathematical Society
  http://www.emis.de/cgi-bin/jfmen/MATH/JFM/full.html

herunterladbaren Einträgen zitiert werden (unter "Command Search" und mit der
Suchmaske an=JFM xx.yyyy.zz   kann man sie auch online suchen und lesen).

Bei der dort mehrmals genannten "Schlömilch Z." handelt es sich um die von
Oscar Xavier Schlömilch im Jahre 1855 im Teubner-Verlag Leipzig gegründete
und redigierte "Zeitschrift für Mathematik und Physik"; damals war aber wohl
die Bezeichnung "Schlömilch's Zeitschrift" die geläufigere ...

| JFM 12.0871.01
| Bremiker, C.
| Bremiker's logarithmisch-trigonometrische Tafeln (mit 6 Decimalen), nebst
| einer Tafel der Gauss'schen Logarithmen. Polnische Ausgabe mit Erläuterungen
| von Dr. Daniel Wierzbicki aus Krakau. [x]
| Berlin. Nicolai.
| Published: (1880)
| [Dickstein, (Warschau)]
|
| Subject heading: Anhang.

Leider konnte ich nicht feststellen, ob und wann eine deutsche Ausgabe dieser
Tafel veröffentlicht wurde.

Bemerkenswert ist, daß 1880 (25 Jahre nach Gauß'Tod) die Bezeichnung "Gauß'sche
Logarithmen" anscheinend schon so geläufig war, daß man sie nicht mehr zu erklären brauchte.
In
  Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics (G)
  Last revision: July 30, 2002
http://members.aol.com/jeff570/g.html
findet man dazu den Eintrag:

GAUSSIAN LOGARITHM appears in 1874 in Rep[orts of the] Brit[ish] Assoc[iation
for the Advancement of Science] (1873):
  "Gaussian logarithms have for their object to facilitate the finding of
   the logarithms of the sum and difference of two numbers whose logarithms
   are known, the numbers being themselves unknown"
(Oxford English Dictionary, 2.nd Edition).

| JFM 21.0094.03
| Zahradník, K.
| Auflösung von quadratischen Gleichungen mit Hülfe der Gaussischen
| Logarithmen.   [J]
| Casop. XVIII. 9. (Böhmisch.)
| Published: (1889)
| [Studnicka, Prof. (Prag)]
|
| Subject heading: Zweiter Abschnitt. Algebra. Capitel 1. Gleichungen.
| (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente
Gleichungen.)

In diesem tschechischen Beitrag wird darauf hingewiesen, daß man mittels
der
Additionslogarithmen quadratische Gleichungen lösen kann:

Für   p*x^2 + q*x + r = 0   sind die (als reell vorausgesetzten) Wurzeln

```
  x_{1,2} = -(q/(2*p)) * (1 +/- sqrt(1-4*p*r/q^2)) =
          =         -u * (1 +/- sqrt(1-v)) =
          =         -u * (1 +/- w)
```

mit

```
  u = q/(2*p) ,  --->  log(u) = log(q) - log(p) - log(2)
  v = r/(p*u^2)  --->  log(v) = log(r) - log(p) - 2*log(u)
  w = sqrt(1-v)  --->  log(w) = 0.5*log(1-v)
```

und wenn log(v) bekannt ist, dann läßt sich log(1-v) mittels Gauß'scher
Logarithmen berechnen, und ebenso die Logarithmen der beiden Wurzeln:

```
  log(x_1) = log(-u) + log(1 + w)
  log(x_2) = log(r) - log (p) - log(x_1)
```

oder

```
  log(x_2) = log(-u) + log(1 - w)
  log(x_1) = log(r) - log (p) - log(x_2)
```

Eine anderer Rechenweg wurde 9 Jahre später von Rudolf Mehmke angegeben,
siehe JFM 29.0075.06 .

| JFM 23.1257.05
| Gravelius, H.
| Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimalteilung
der
| Quadranten, nebst Tafeln der Logarithmen der Zahlen, Antilogarithmen,
Tafeln
| der Zahlenwerte der trigonometrischen Functionen, Gauss'schen
Logarithmen,
| Quadrattafeln und Logarithmen der Hyperbelfunctionen. [B]
| Berlin. Dümmler's Verlag. 64 S. gr. 8^o.
| Published: (1891)
|
| Subject heading: Anhang. Weitere Litteratur.

Wegen der nur 4 Stellen dieser Tafel und der darin enthaltenen Quadrattafel
könnte dies eine Ausgabe für den Gebrauch in Schulen / Gewerbeschulen
gewesen
sein.

| JFM 23.1255.02
| Gundelfinger, S.; Nell, A.
| Tafeln zur Berechnung neunstelliger Logarithmen mittels einer neuen
| Interpolationsmethode. Mit erläuterndem Nachwort. [B]
| Darmstadt. A. Bergsträsser. IV + 60 S. gr. Lex. 8^o.
| Published: (1891)
|
| Die Tafel besteht aus zwei Teilen. Tafel I (S. 2-37) enthält die
| neunstelligen Logarithmen aller vierstelligen Zahlen. Tafel II giebt zu
| den Argumenten A gewisse Functionswerte B auf neun Decimalen, wo
| nämlich 10^B = 1 + 10^A; also wenn A gleich log x gesetzt wird, ist
| B = log(x+1). Soll zu einer gegebenen Zahl N der neunstellige
| Logarithmus gesucht werden, so bilde man eine vierstellige Zahl n aus
| den vier ersten Ziffern von N linker Hand und setze p = N-n, suche
| A = log p - log n auf sechs Decimalen, bestimme B aus Tafel II;
| dann ist endlich log N = B + log n. Die genaueren Vorschriften sind in
| dem erläuternden Nachwort gegeben.
| Es ist somit den Verfassern gelungen, durch diese Einrichtung der Tafeln
| die Berechnung neunstelliger Logarithmen auf geringem Raume bequem zu
| ermöglichen.
| Reviewer: Lampe, Prof. (Berlin)

Mit dieser Tafel tritt, soweit ich feststellen konnte, der zuerst an der
U. Tübingen und seit 1879 an der TH Darmstadt lehrende Mathematiker
Siegmund Gundelfinger erstmalig mit einer Arbeit über Gauß'sche Logarithmen
in Erscheinung. Das Prinzip soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:

Sei N = 0.12345678 , dann ist
     n = 0.1234 ,
     p = 0.00005678 ,
     A = log(p/n) = log(0.00005678/0.1234) = log(N/n-1) := log(m) ,

und geht man jetzt mit A in die P-Spalte einer Additionslogarithmentafel,
so liefert die R-Spalte den Wert

     B = log(1+m) = log(N/n) = log(N) - log(n) ,

und somit ist

     log(N) = B + log(n) .

Da sowohl n als auch p immer höchstens 4 signifikante Ziffern
besitzen,
benötigt man nur eine relativ kleine Tafel der gewöhnlichen Logarithmen
(mit
rund 9000 Einträgen), und da p/n immer in der Größenordnung von 10^(-4)
ist, braucht man eine zwar genaue, aber ebenfalls nur kleine Tafel von
Additionslogarithmen, und zwar nur die P- und die R-Spalte.

| JFM 24.1170.02

| Nell, A. M.
| Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen,
| nebst den Logarithmen für Summe und Differenz zweier Zahlen, deren
Logarithmen
| gegeben sind, sowie einigen anderen Tafeln, mit einer neuen, die Rechnung
| erleichternden Anordnung der Proportionalteile. 7. Aufl. [B]
| Darmstadt. Bergsträsser Verl. XX + 104 S. 8^o.
| Published: (1892)
|
| Subject heading: Anhang. Weitere Litteratur.

Noch eine Tafel mit Additionslogarithmen, allerdings nur 5-stellig und somit
in der von Gauß berechneten Genauigkeit. Soweit ich feststellen konnte, war
diese Auflage der Nell'schen Tafel die erste, die auch Additionslogarithmen
enthielt.

| JFM 26.0469.02
| Mehmke, R.
| Additionslogarithmen für complexe Grössen. [J]
| Schlömilch Z. XL. 15-30.
| Published: (1895)
|
| Die Aufgabe: ``Aus den Logarithmen der Moduln und den Amplituden zweier
| complexen Zahlen den Logarithmus des Moduls und die Amplitude der Summe
| jener complexen Zahlen zu bestimmen'', lässt sich mit einer Tafel der
| Additionslogarithmen für complexe Zahlen bequemer als auf die gewöhnliche
Art
| lösen. Der Verfasser giebt einen Auszug aus einer solchen Tafel. Dieselbe
| liefert die der fundamentalen Gleichung 10^B (cos b + i sin b) =
| 10^A (cos a + i sin a) + 1 entsprechenden Werte der B und b in ihrer
| Abhängigkeit von den Grössen A und a; jede der beiden Tafeln hat zwei
| Eingänge; die Anordnung ist so getroffen, dass A von Reihe zu Reihe,
| a von Spalte zu Spalte sich ändert.
| Auch einige der wichtigsten Eigenschaften der Grössen B und b als
| Functionen der A und a werden abgeleitet.
| [Weltzien, Prof. (Zehlendorf)]
|
| Subject heading: Siebenter Abschnitt. Functionentheorie. Capitel 2.
Besondere
| Functionen. A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen
und
| der hypergeometrischen Reihen).

Hier tritt der zweite Protagonist der Gauß'schen Logarithmen auf, nämlich
der von 1880-1884 am Polytechnikum Stuttgart, von 1884-1894 an der
TH Darmstadt und von 1894-1934 wieder an der (1890 vom Polytechnikum zur
TH umgewandelten) TH Stuttgart lehrende Mathematiker Rudolf Mehmke.
Während ich über Siemund Gundelfinger außer
http://www.lsus.edu/sc/math/rmabry/math223/gundelfinger.html   ;-))
aber praktisch nichts finden konnte, gibt es von Rudolf Mehmke eine sehr
ausführliche akademische Biographie unter
http://www.gnt-verlag.de/programm/15/p263-285_reich.shtml
in der auch S. Gundelfinger als einer der Lehrer (neben u.a. K. Weierstraß)
von R. Mehmke erwähnt ist.

Das Prinzip dürfte klar sein:

Man setzt z1 = r1*exp(i*w1), z2 = r2*exp(i*w2) und

  r1*exp(i*w1) + r2*exp(i*w2) = r1*exp(i*w1)*[1 + (r2/r1)*exp(i*(w2-w1))],

geht mit log(A) := log(r2/r1) = log(r2)-log(r1), a := w2-w1 in die
Mehmke'sche Tafel und liest daraus B und b ab; der Logarithmus der
Summe der beiden komplexen Zahlen ist dann gleich

  log(z1 + z2) = log(r1) + B + i*(w1 + b) .

Bei der erwähnten Tafel wird r1 > r2 > 0 vorausgesetzt, dann ist immer
r2/r1 < 1 und damit B < log(2) und -pi/2 < b < pi/2.

| JFM 28.0100.01 Gundelfinger, S.
| Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer
| Gleichungen.
| Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtractions- und Briggische
| Logarithmen, sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter
| Hundert. [B]
| Leipzig: B. G. Teubner. IV + 15 S. 4^o.
| Published: (1897)
|
| Die den Tafeln zu Grunde liegende Auflösungsmethode ist durch Ausbau der
| Gauss'schen entstanden und unterscheidet sich von letzterer dadurch,
dass,
| während Gauss die trinomische Gleichung mit der Identität
| cos^2 theta + sin^2 theta = 1
| vergleicht, Gundelfinger sie auf die Form 1 + 10^A = 10^B bringt. Die
| Benutzung der Tabellen wird an Beispielen ausführlich erläutert.
| Reviewer: Faerber, Dr. (Berlin)

Was es mit diesen ominösen trinomischen Gleichungen und der Gauß'schen
Auflösungsmethode genau auf sich hat, konnte ich bisher leider noch nicht
feststellen - ich forsche noch ;-)

| JFM 29.0075.06
| Mehmke, R.
| Hülfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln.
[J]
| Schlömilch Z. 43, 80-84.
| Published: (1898)
|
| Die aufzulösende Gleichung
| a*x^2 +- b*x - c = 0 resp. a*x^2 +- b*x + c = 0
| (a, b, c positiv) wird durch die Substitution
| x = +- c/by resp. x = -+ c/by
| auf die Form
| y^2 - y - ac/b^2 = 0 resp. y - y^2 - ac/b^2 = 0
| gebracht.
| Von zwei nach Art der Logarithmentafeln eingerichteten Tabellen
| liefert die eine v = log y als Function von u = log(y^2-y), die andere
| als Function von u = log(y-y^2). Nachdem u durch drei Subtractionen
| bekannter Logarithmen bestimmt ist, findet man v aus der Tabelle und
| sodann durch eine Subtraction log(+- x_1) und durch eine Addition
| log(+- x_2). Die Tafeln sind zunächst auf drei Stellen berechnet.
| [Faerber, Dr. (Berlin)]
|

| Subject heading: Zweiter Abschnitt. Algebra. Kapitel 1. Gleichungen.
| (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente
Gleichungen.)

Die Einrichtung der beiden erwähnten Tabellen dürfte klar sein: Mit

  u = log(a) + log(c) - 2*log(b) := log(m)

als Eingang sind dies die beiden Tabellen

  v := log(y) = log(1 + sqrt(1 + 4*m)) - log(2)
  v := log(y) = log(1 + sqrt(1 - 4*m)) - log(2) ,

und hat man den Wert von v aus der entsprechenden Tabelle abgelesen, dann
folgt

  log(|x_1|) = log(c) - log(b) - v
  log(|x_2|) = log(b) - log(a) + v .

Die Tabellen selbst lassen sich mittels normaler Additionslogarithmentafeln
problemlos, wenn auch ziemlich mühsam, berechnen.

| JFM 32.0948.01
| Gundelfinger, S.
| Sechsstellige Gaussische und siebenstellige gemeine Logarithmen. [B]
| Leipzig: Veit u. Co. 31 S. 4^o.
| Published: (1901)
|
| Es sei 10^B = 1 + 10^A, so hat man zur Berechnung von B, resp. A:
|
| B = log 2 + A/2 + {A^2}/{8 M} - {A^4}/{192 M^3} +
| + {A^6}/{45 * 2^6 M^5} - ...,   A < pi M,
|
| A = log 1/M + log B + B/2 + {B^2}/{24 M} -
| - {B^4}/{2880 M^3} + ...,   B < 2 pi M,
|
| wo M = log e. Nachdem Formeln zur schnellen Berechnung an den
| Grenzen A < 8,00-10; A > 2,00 resp. B < 0,004321; B > 2,004321
| gegeben sind, folgen auf nur acht Seiten sechsstellige Gaussische
| Logarithmen (-2 < A < 2), eine Tabelle zur genaueren Berechnung von
| A bei gegebenem B, wenn B < 0,051047 (auf S. 10), dann auf nur
| 18 Seiten siebenstellige gemeine Logarithmen und schliesslich
| vierstellige Logarithmen der Zahlen 1-1000 zur Verwandlung von
| Produkten und Quotienten dreiziffriger Zahlen in Dezimalbrüche.
| (Vgl. Gundelfinger und Nell, Tafeln zur Berechnung neunstelliger
| Logarithmen, Darmstadt 1891; vgl. F.d.M. 23, 1255, JFM23.1255.02).
| [Müller, F.; Prof. (Friedenau)]
|
| Subject heading: Anhang.

Eine Tafel 6-stelliger Gauß'scher Logarithmen und Reihenentwicklungen.
Mit A und B sind dabei die ganz am Anfang mit P und Q bezeichneten
Spalten der Tafel gemeint.

| JFM 32.0438.02

| Gundelfinger, S.
| Zur Berechnung der Gauss'schen Logarithmen für kleine Werte von B, resp.
| zugehörige Werte von A. [J]
| J. für reine u. angew. Math. 124, 87-92.
| Published: (1901)
|
| Die Arbeit behandelt die Berechnung von B bei gegebenem A und umgekehrt von
| A bei gegebenem B auf mehr als sechs Dezimalstellen und gibt Hülfstabellen
| dazu.
| Zum Schlusse wird als Beispiel log_{10} 1/2 omega berechnet,
| wo 1/2 omega den Quadranten der Lemniskate bedeutet, und nachgewiesen,
| dass in dem von Gauss gegebenen Werte die neunte Dezimale unrichtig ist;
| an Stelle von 2 muss 4 stehen.
| [Haussner, Prof. (Karlsruhe)]
|
| Subject heading: Siebenter Abschnitt. Funktionentheorie. Kapitel 2. Besondere
| Funktionen. A) Elementare Funktionen (einschliesslich der Gammafunktion
| und der hypergeometrischen Reihe).

Hmm, auch der große Gauß hat offenbar zuweilen falsch gerechnet ;-))

| JFM 38.0983.03
| Cohn, B.
| über die verschiedenen Anordnungen der Additions- und
| Substraktions-Logarithmen. [J]
| Zs. f. Math. u. Phys. 55, 138-144.
| Published: (1907)
|
| Einem Gedanken von Leonelli folgend, richtete Gauss die Tafeln der
| Additions- und Substraktionslogarithmen so ein, dass er drei Reihen für resp.
| log x, log(1+x), log(1+1/x) gab. Sieht man die zweite oder die dritte Reihe
| als Argumentenreihe an, so lautet die Zusammenstellung resp.
| log x, log(x-1), log(x/(x-1)) und log x, log(1/(x-1)), log(x/(x-1)).
| Es wird nun untersucht, wann man mit einer einzigen Tafel ausreicht,
| wann man getrennter Tafeln bedarf, und welche von diesen Zusammenstellungen
| den Vorzug verdient.
| [Müller, F.;Prof. (Weisser Hirsch)]
|
| Subject heading: Anhang.

Nach über 100 Jahren mal wieder die Erwähnung von Z. Leonelli ...

| JFM 40.1032.15
| Cohn, B.
| Tafeln der Additions- und Subtraktions-Logarithmen auf 6 Dezimalen. [B]
| Leipzig: W. Engelmann. IV u. 63 S. gr. 8^o.
| Published: (1909)
|
| Subject heading: Anhang. Weitere Literatur.

Diese Cohn'sche Tafel erlebte eine ganze Reihe von Auflagen; die jüngste, für
die ich ein Zitat gefunden habe, ist:

B.Cohn: Tables of Addition and Subtraction Logarithms with Six Decimals.
2nd ed., With a preface by L. J. Comrie.
Scientific Comp. Service Ltd, London 1939.

Und dann gibt es noch eine Tafel, für die ich zwar keine bibliographischen Angaben finden konnte, die aber bei mir im Regal steht:

Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln
(sexagesimal unterteilte Altgrad).
Bearbeitet von Dr. F. G. Gauß. Herausgegeben von Dr.-Ing. H. H. Gobbin.
381.-390. Auflage.
Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer 1957.

Diese Tafel enthält als Tafel V, S.97-108 eine 5-stellige Tafel "Additions- und Subtraktions-Logarithmen", die in der Eingangsspalte (d.h. der [hier mit A bezeichneten] P-Spalte) die Auflösung

```
  -5.0   ... -4.1    in Schritten von 0.1
  -4.10  ... -2.01   in Schritten von 0.01
  -2.000 ...  2.999  in Schritten von 0.001
   3.00  ...  4.99   in Schritten von 0.01
```

besitzt - wir erinnern uns, daß diese Spalte den Logarithmus des Verhältnisses der zu addierenden oder zu subtrahierenden Zahlen enthält, d.h.
P := log(a/b) = log(a) - log(b), P <= 0 für a/b <= 1, P >= 0 für a/b >= 1.
Die [mit B bezeichnete] Ergebnisspalte entspricht jetzt für P <= 0 der Q-Spalte log(1 + 10^(-P)) und für P >= 0 der R-Spalte log(1 + 10^P). Man muß also je nach Zahlenbereich von P mit unterschiedlichen Formeln arbeiten.

In einer von den gleichen Autoren stammenden vierstelligen gekürzten Schulausgabe dieser Tafel ohne die Additionslogarithmen (1958) steht im Vorwort, daß erstere eine Bearbeitung der "großen" 5-stelligen Tafel und erstmalig im Jahre 1900 aufgelegt worden sei, sodaß die 5-stellige vollständige Tafel spätestens 1900 erschienen sein muß.
Ob der Bearbeiter Dr. F. G. Gauß mit Carl Friedrich Gauß verwandt ist, kann ich leider nicht sagen, aber möglich wäre es ... jedoch sicherlich kein Sohn oder Enkel, denn gemäß der Kurzbiografie in
http://www.math.uni-hamburg.de/math/ign/gauss/gaussbio.html
hatte keiner die Initialen F. G. ...

Damit wären wir fast am Ende, aber nur fast, denn im Dezember 1975 erschien der Aufsatz

E. E. Swartzlander; A. G. Alexopoulos: The Sign/Logarithm Number System.
IEEE Transactions on Computers 24 (1975), no. 12, pp. 1238-1242

und darin schlugen die Autoren vor, für bestimmte Anwendungen die gebräuchliche

Gleitkomma-Zahlendarstellung eines Computers durch eine logarithmische Zahlendarstellung zu ersetzen, und erfanden dafür auch gleich die Bezeichnung

LNS = Logarithmic Number System.

Die Addition und Subtraktion in einem solchen LNS erfordert nun genau die Leonelli-Gauß'schen Additionslogarithmen und damit eine Look-Up-Tabelle. Das könnte ein interessantes Kuriosum sein, ebenso wie Vorschläge aus jener Zeit für diverse

XLNS = eXtended Logarithmic Number Systems ,

wenn nicht ...

> ... among the many topics ... in "M. Kahrs; K. Brandenburg (Eds): Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics. Kluwer Acad. Publ. 1998, ISBN 0-7923-8130-0" ... is a description of the 13 bit LNS used in Yamaha music synthesizers during the 1980's. ...
>
> ... the University of Tokyo has been developing custom VLSI that use LNS to speed up astrophysical calculations. Their GRAPE-5 model won a Gordon Bell Prize in 1999. ...
>
> ... A High Speed Logarithmic Arithmetic Unit ...
> Esprit Project 23544 - HSLA, Open LTR - 1st phase, May 1997 ...
> Esprit Project 33544 - HSLA, Open LTR - 2nd phase, Jan 1999 ...
> ... a grant proposal that outlines a three year research project that is presently underway at the U. of Newcastle upon Tyne to create a commercial grade LNS microprocessor and LNS ASIC cells ...
> http://www.cordis.lu/esprit/src/23544.htm
> http://www.cordis.lu/esprit/src/33544.htm
>
> ... The European HSLA project has completed the design of its LNS arithmetic unit and has announced that the design is now [in 2000] available for evaluation as an FPGA core. ...
> http://napier.ncl.ac.uk/HSLA/
>
> ... Motorola has patented [May 2000] and fabricated a DSP chip based on parallel LNS processors (probably for the Iridium satellite system). ...

Wen das interessiert, der sei darauf hingewiesen, daß sogar eine eigene Webseite für LNS/XLNS existiert:
http://www.xlnsresearch.com ,
und daß es in
http://www.xlnsresearch.com/articles.htm
eine Bibliographie mit mehr als 350 Arbeiten zu LNS / XLNS gibt (Stand 20.4.2002) - und darin finden sich auch Z. Leonelli's Büchlein und einige Arbeiten von S. Gundelfinger und R. Mehmke ;-)

Grüße
Hermann